ΛΥΣΕΙΣ

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2007

ΘΕΜΑ 1ο

Α.

1. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδες 224-225

2. . Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 149

Β. 1.Σ , 2.Λ, 3.Σ , 4.Σ , 5.Λ

ΘΕΜΑ 2ο

α)

$|z_1|^2 + |z_2|^2 = |i|^2 + |1|^2 = 1 + 1 = 2$ και $|z_3|^2 = |1+i|^2 = 1 + 1 = 2$

Άρα $|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_3|^2$

β)

Έστω $z = x + yi$

i) $|z - z_1| = |z - z_2| \Leftrightarrow |x + yi - i| = |x + yi - 1|$

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2$$

$$x = y$$

$$Re(z) = Im(z)$$

ii) $A = \dfrac{z}{\overline{z}} + \dfrac{\overline{z}}{z} = \dfrac{x+xi}{x-xi} + \dfrac{x-xi}{x+xi} =$

$$= \frac{(x+xi)^2 + (x-xi)^2}{(x-xi)(x+xi)} =$$

$$= \frac{x^2 + 2x^2 i - x^2 + x^2 - 2x^2 i - x^2}{(x-xi)(x+xi)} = 0$$

ΘΕΜΑ 3ο

α)

$$f\left(\frac{1}{e^5}\right) = \ln\frac{1}{e^5} + \frac{1}{4\cdot\frac{1}{e^5}} = \ln 1 - \ln e^5 + \frac{e^5}{4} = 0 - 5 + \frac{e^5}{4} = \frac{e^5 - 20}{4} > 0, \text{ αφού } e \approx 2{,}71$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \ln\frac{1}{4} + \frac{1}{4\cdot\frac{1}{4}} = \ln 1 - \ln 4 + 1 = 0 - \ln 4 + \ln e = \ln e - \ln 4 < 0, \quad \text{αφού } e < 4$$

$f(e^5) = \ln e^5 + \dfrac{1}{4e^5} = 5 + \dfrac{1}{4e^5} > 0$

β)

$f\,'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{4x^2}$ με $f\,'(1) = \dfrac{3}{4}$ και $f(1) = \dfrac{1}{4}$

Η ζητούμενη εξίσωση είναι η $y - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}(x-1) \iff y = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{2}$

γ)

$f\,'(x) = 0 \iff \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{4x^2} = 0 \iff x = \dfrac{1}{4}$

Πρόσημο της $f\,'$ και μονοτονία της f

x	0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f\,'$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	|	$\nearrow$	

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0\,,\ \dfrac{1}{4}\right]$

και γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{1}{4}\,,\ +\infty\right)$

δ)

Η f είναι συνεχής σε κάθε ένα από τα διαστήματα $\left[\dfrac{1}{e^5}\,,\ \dfrac{1}{4}\right]$ και $\left[\dfrac{1}{4}\,,\ e^5\right]$

σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Από το ερώτημα α) έχουμε $f\left(\dfrac{1}{e^5}\right) \cdot f\left(\dfrac{1}{4}\right) < 0$, άρα, κατά το θεώρημα Bolzano,

εξίσωση $f(x) = 0$ θα έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left[\dfrac{1}{e^5}\,,\ \dfrac{1}{4}\right]$.

Και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, η ρίζα θα είναι μοναδική.

Ομοίως στο διάστημα $\left[\dfrac{1}{4}\,,\ e^5\right]$

Τελικά, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

ΘΕΜΑ 4ο

α)

$h'(x) = -e^{-x} f(x) + e^{-x} f\,'(x) + 4e^{-4x} = e^{-x}\left(f\,'(x) - f(x)\right) + 4e^{-4x} =$

λόγω της υπόθεσης $= e^{-x}(-4e^{-3x}) + 4e^{-4x} =$

$= -4e^{-4x} + 4e^{-4x} = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα $h(x) = c$

β)

$h(x) = c \quad \Leftrightarrow \quad e^{-x} f(x) - e^{-4x} = c \quad$ **(1)**

Για $x = 0$, η (1) δίνει $\quad f(0) - 1 = c \quad \Leftrightarrow \quad 2 - 1 = c \quad \Leftrightarrow \quad c = 1$ οπότε

Η (1) γίνεται $\quad e^{-x} f(x) - e^{-4x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - e^{-3x} = e^{x}$

$$f(x) = e^{-3x} + e^{x}$$

$$f(x) = \frac{1}{e^{3x}} + e^{x}$$

γ)

$$I(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \left(e^t + \frac{1}{e^{3t}}\right)dt = \int_0^x (e^t + e^{-3t})dt =$$

$$= \left[e^t - \frac{1}{3}e^{-3t}\right]_0^x =$$

$$= \left(e^x - \frac{1}{3}e^{-3x}\right) - \left(1 - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{3e^x - e^{-3x} - 2}{3}$$

δ)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{I(x)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3e^x - e^{-3x} - 2}{3x^2} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(3e^x - e^{-3x} - 2)'}{(3x^2)'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3e^x + 3e^{-3x}}{6x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(3e^x + 3e^{-3x})'}{(6x)'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3e^x - 9e^{-3x}}{6} = +\infty$$

* Ισχύουν $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\quad \lim_{x\to+\infty} e^{-3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{3x}} = \left(\frac{1}{+\infty}\right) = 0$